Решение задания № 19 по математике, профильный уровень на экзаменах ЕГЭ-2018. Дидактический материал. Основные типы заданий.

Задание №19 профильного уровня, введенное с 2010 года, рассчитанное на сильных учащихся и является заданием олимпиадного типа: на умение строить и исследовать простейшие математические модели, умения осуществлять поиск решения, выбирая различные подходы из числа известных, модифицируя методы решать уравнения и неравенства. Для того чтобы продвинуться в его решении, не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определенный уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе. Задание №19 – четырехбальное задание. Ответ на вопрос под буквой а) по силам большинству успевающих учащихся, главное здесь – не испугаться условия, дочитать его до конца и хорошо подумать и давать аргументированное решение, а не ответ «да» или «нет» или только один подтверждающий пример.
Рассматривались задания, опубликованные в интернете на сайтах: www.yagubov.ru , www.reshu.ege, www.alexiarin.net и других.
Решения рассмотренных заданий может быть записаны слишком подробно, но это делалось с учетом тех учащихся, с которыми они рассматривались на еженедельных занятиях в г.Ейске. Учитель разбирал основные типы заданий, то есть задания под буквой а) и учащиеся самостоятельно решали задания под буквами б), в) и т.д.

Основная волна 01.06.2018.

№1.1.(а) В школах №1 и №2 писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, суммарно тест писал 81 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в два раза?
б) Средний балл в школе №1 вырос на 20 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 20 %. Мог ли первоначальный балл в школе №2 равняться 1?
в) Средний балл в школе №1 вырос на 20 %, средний балл в школе №2 также вырос на 20%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2?
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018. Вариант 302.

Решение:
Пусть n – количество учащихся школы № 1, писавших первоначально тест; x, y – первоначальный средний балл по тесту в школе №1 и в школе №2 соответственно; z-балл по тесту ученика, перешедшего из школы №1 в школу №2, где n, x, y, z – натуральные числа, где $2 \le n \le 79$.
а) Краткое условие и решение задачи можно записать в виде таблицы.

	Для первоначальных условий, то есть до перехода учащегося.			Условия, после перехода учащегося.		
№ школы	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по

			школе			школе
№1	*n*	*x*	*xn*	*n-1*	*2x*	*2x(n-1)*
№2	*81-n*	*y*	*y(81-n)*	*82-n*	-	-

Сравнивая сумму баллов, по школе №1 до перехода учащегося и после перехода учащегося получим уравнение *z=xn – 2x(n-1), z=2x-xn. z=x(2-n).* Уравнение не имеет решений, так как $2 \le n \le 79$ и *n, x, z* – натуральные числа.
Значит средний балл по школе №1 не мог увеличиться в 2 раза.
б) Для решения задачи под буквами б) и в) составим таблицу.

	Для первоначальных условий, то есть до перехода учащегося.			Условия, после перехода учащегося.		
№ школы	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе
№1	*n*	*x*	*xn*	*n-1*	*1,2x*	*1,2x(n-1)*
№2	*81-n*	*y*	*y(81-n)*	*82-n*	*1,2y*	*1,2y(82-n)*

Сравнивая сумму баллов, по школам №1 и №2 получим систему уравнений.
$\begin{cases} z = xn - 1{,}2x(n-1), \\ z = 1{,}2y(82-n) - y(81-n); \end{cases}$ $\begin{cases} z = 1{,}2x - 0{,}2xn, \\ z = 17{,}4y - 0{,}2yn; \end{cases}$ $\begin{cases} 10z = x(12-2n), \\ 10z = y(174-2n); \end{cases}$

$$\begin{cases} 5z = x(6-n), \\ 5z = y(87-n); \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $2 \le n \le 5$, так как *n, x, z* – натуральные числа.
По условию задачи под пунктом б) *y=1*, значит система уравнений примет вид
$\begin{cases} 5z = x(6-n), \\ 5z = 87-n; \end{cases}$. Решая второе уравнение в натуральных числах и учитывая, что левая часть делится на 5, тогда и правая часть делится на 5, получим *n=2, z=17.* Тогда первое уравнение системы примет вид *4x=85*, которое не имеет решения в натуральных числах, тогда система уравнений не имеет решения в натуральных числах.
Значит первоначальный средний балл в школе №2 не мог равняться *1*.
в) Используя решение под пунктом б) получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5z = x(6-n), \\ 5z = y(87-n); \end{cases}$$

Случай *y=1* рассмотрен под буквой б) и при этом система уравнений не имеет решения.
Если *y=2*, тогда второе уравнение системы будет иметь вид *5z=2(87-n)*, так как левая часть делится на 5, тогда и правая часть делится на 5, получим *n=2, z=34.* Тогда первое уравнение системы имеет вид *4x=170*, которое не имеет решения в натуральных числах.
Аналогично для *y=3*, тогда второе уравнение системы будет иметь вид *5z=3(87-n)* получим *n=2, z=51.* Тогда первое уравнение системы имеет вид *4x=255*, которое не имеет решения в натуральных числах.

Аналогично для $y=4$, тогда второе уравнение системы будет иметь вид $5z=4(87-n)$ получим $n=2$, $z=68$. Тогда первое уравнение системы имеет вид $4x=340$, $x=85$. Тогда $n=2$, $x=85$, $y=4$, $z=68$ решение системы уравнений в натуральных числах.
Значит 4- наименьшее значение первоначального среднего балла в школе.
Ответ: а) нет; б) нет; в) 4; например, первоначально в школе №1 было 68, 102 балла у двух учащихся, а в школе №2 у 79 учащихся было по 4 балла и после перехода учащегося, в школе №1 стало 102 балла у одного ученика, а в школе №2 стало у одного ученика 68 баллов и у 79 учащихся стало по 4 балла.

№1.1.(б) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в два раза?
б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?
в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018. Вариант 301.

№1.1.(в) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 81 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в 20 раз?
б) Средний балл в школе № 1 вырос на 20%, средний балл в школе № 2 также вырос на 20%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?
в) Средний балл в школе № 1 вырос на 20%, средний балл в школе № 2 также вырос на 20%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№1.1.(г)В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в 10 раз?
б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?
в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10%, средний балл в школе № 2 также вырос на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№1.1.(д) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 37 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе

средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в два раза?
б) Средний балл в школе № 1 вырос на 5%, средний балл в школе № 2 также вырос на 5%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 1?
в) Средний балл в школе № 1 вырос на 5%, средний балл в школе № 2 также вырос на 5%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№1.2.(а) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?
б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 7?
в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

Решение:

Пусть n – количество учащихся школы № 1, писавших первоначально тест; x, y – первоначальный средний балл по тесту в школе №1 и в школе №2 соответственно; z- балл по тесту ученика, перешедшего из школы №1 в школу №2, где n, x, y, z – натуральные числа, где $2 \leq n \leq 7$.
а) Краткое условие и решение задачи можно записать в виде таблицы.

	Для первоначальных условий, то есть до перехода учащегося.			Условия, после перехода учащегося.		
№ школы	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе
№1	*n*	*x*	*xn*	*n-1*	$\frac{x}{10}$	$\frac{x(n-1)}{10}$
№2	*9-n*	*y*	*y(9-n)*	*10-n*	-	-

Тогда сравнивая сумму баллов по школе №1 до перехода учащегося и после перехода учащегося получим уравнение $z = xn - \frac{x(n-1)}{10}$,10*z*=*xn – x(n-1), 10z=x+9xn, 10z=x(9n+1)*.Если *n=2, то 10z=19x, z=19, x=10.* Тогда например, в школе №1 тест написали на 19 и 1 баллы, средний балл 10 баллов и после перехода ученика остался ученик с 1 баллом и средний балл стал равен 1, то есть средний балл уменьшился в 10 раз.
Значит, средний балл в школе №1 мог уменьшиться в 10 раз.

б) Для решения задачи под буквами б) и в) составим таблицу.

	Для первоначальных условий, то есть до перехода учащегося.			Условия, после перехода учащегося.		
№ школы	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе
№1	*n*	*x*	*xn*	*n-1*	*0,9x*	*0,9x(n-1)*
№2	*9-n*	*y*	*y(9-n)*	*10-n*	*0,9y*	*0,9y(10-n)*

Сравнивая сумму баллов, набранных учениками школ №1 и №2 первоначально и после перехода ученика из школы №1 в школу №2 получим систему уравнений. $\begin{cases} z = xn - 0{,}9x(n-1), \\ z = 0{,}9y(10-n) - y(9-n); \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0{,}1x + 0{,}9xn, \\ z = 0{,}1yn; \end{cases}$ $\begin{cases} 10z = x(9+n), \\ 10z = yn; \end{cases}$ (*). Учитывая, что для б) *y=7*получим

$$\begin{cases} 10z = x(9+n), \\ 10z = 7n; \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы получим, что оно не имеет решения в натуральных числах при данных условиях, так как $2 \le n \le 7$.
Значит, первоначальный средний балл в школе №2 не мог равняться *7*.
в) Используя решение под пунктом б) получим систему уравнений $\begin{cases} 10z = x(9+n), \\ 10z = yn; \end{cases}$ (*).
Если *y=1*, то второе уравнение системы имеет вид *10z=n*, оно не имеет решения в натуральных числах при данных условиях, так как $2 \le n \le 7$.
Если *y=2*, тогда второе уравнение системы будет иметь вид 10*z=2n*, *n=5*,*z=*1 и тогда первое уравнение системы имеет вид *10=14x*, оно не имеет решения в натуральных числах.
Если *y=3*, тогда второе уравнение системы будет иметь вид 10*z=3n* , которое не имеет решения в натуральных числах при данных условиях, так как $2 \le n \le 7$.
Если *y=4*, тогда второе уравнение системы будет иметь вид 10*z=4n*, получим *n=5, z=2*. Тогда первое уравнение системы имеет вид *14x=20*, которое не имеет решения в натуральных числах.
Если *y=5*, тогда второе уравнение системы будет иметь вид 10*z=5n*, это уравнение имеет решение.
Первый случай, *n=2, z=1* и тогда первое уравнение системы имеет вид *10=11x*, оно не имеет решения в натуральных числах.
Второй случай, *n=4, z=2* и тогда первое уравнение системы имеет вид *20=13x*, оно не имеет решения в натуральных числах.
Третий случай, *n=6, z=3* и тогда первое уравнение системы имеет вид *30=15x, x=2*.
Значит система уравнений имеет решение *y=5, z=3, n=6, x=2*.
Приведем какой-нибудь пример, в школе №1 ученики написали тест на 3, 1,1,1,1,5 баллов, в школе №2 ученики написали тест на 5,5,5 баллов. Средний балл учеников школы №1 был 2 балла, а средний балл учеников школы №2 был 5 баллов. А после

перехода ученика из школы №1 с 3 баллами в школу №2 средний балл в школе №1 стал 1,8 балла, а в школе №2 стал 4,5 балла.
Мы видим, что на *10%* уменьшился средний балл в школах №1 и №2. Значит, 5- наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2.
Ответ: а) да; например, первоначально в школе №1 было два ученика с баллами 19 и 1, а после перехода учащегося, в школе №1 остался один ученик с 1 баллом; б) нет;
в) 5; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 3, 1, 1, 1, 1, 5, а в школе №2 были ученики с баллами 5, 5, 5, а после перехода учащегося, в школе №1 стали ученики с баллами 1, 1, 1, 1, 5, а в школе №2 стали ученики с баллами 3, 5, 5, 5.

№1.2.(б) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 50 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 2 раза?
б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 2 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2 %. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 9?
в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 2%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 2 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№1.2.(в) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 30 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 4 раза?
б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 4 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 4 %. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 8?
в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 4 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 4 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№1.2.(г) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся, а суммарно тест писали 15 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов, оказалось, что в каждой школе средний балл был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.
а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 5 раз?
б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 5 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 5 %. Мог ли первоначальный балл в школе № 2 равняться 11?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 5 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 5 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№1.3.(а) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый ученик набрал натуральное количество баллов, среднее арифметическое баллов учеников школы № 1 равно 18, среднее арифметическое учеников школы № 2 является натуральным числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест пересчитали в обеих школах, и получилось, что в обеих школах он увеличился на 10 %.
а) Какое количество учеников могло писать тест, в школе № 1?
б) Какой максимальный балл мог набрать школьник из школы № 1?
в) Какое минимальное число учеников писало тест, в школе № 2 , если их больше 10?
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

Решение:
Пусть n – количество учащихся школы № 1, m – количество учащихся школы № 2, писавших первоначально тест; y – первоначальный средний балл по тесту в школе №2; z- балл по тесту ученика, перешедшего из школы №1 в школу №2, где n, m, y, z – натуральные числа, где $n \geq 2, m \geq 2$.
а) Краткое условие и решение задачи можно записать в виде таблицы.

	Для первоначальных условий, то есть до перехода учащегося.			Условия, после перехода учащегося.		
№ школы	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе
№1	*n*	*18*	*18n*	*n-1*	*19,8*	*19,8(n-1)*
№2	*m*	*y*	*ym*	*m+1*	*1,1y*	*1,1y(m+1)*

Сравнивая, сумму баллов, набранных учениками школ №1 и №2 первоначально и после перехода ученика из школы №1 в школу №2, получим систему уравнений.
$\begin{cases} z = 18n - 19{,}8(n-1), \\ z = 1{,}1y(m+1) - ym; \end{cases}$ $\begin{cases} z = 19{,}8 - 1{,}8n, \\ z = 0{,}1ym + 1{,}1y; \end{cases}$ $\begin{cases} 10z = 18(11-n), \\ 10z = y(m+11); \end{cases}$. Решая первое уравнение системы в натуральных числах получим, что $n=6$, $z=9$. Тогда второе уравнение имеет вид $90=y(m+11)$, решая его в натуральных числах, получим $m=4$, $y=6$ или $m=7$, $y=5$ или $m=19$, $y=3$ или $m=34$, $y=2$ или $m=79$, $y=1$.
Приведем какой-нибудь пример, пусть первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 ученики с баллами 6, 6 ,6, 6, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 ученики с 9, 6, 6, 6, 6 баллами.
Значит, 6 учеников могло писать тест, в школе №1.
б) Используя решение под пунктом а) получим. Так как 6 - количество учеников, писавших тест в школе №1 и их средний балл равен 18, тогда сумма баллов, набранных учениками школы №1 равен 108, и учитывая, что ученик, который перешел из школы №1 в школу №2 имел 9 баллов, то чтобы найти максимальный балл, который набрал ученик школы №1, надо , чтобы остальные 4 ученика набрали

минимальное количество баллов - по 1 баллу, тогда максимальный балл будет равен 95.
Приведем какой-нибудь пример, пусть первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 ученики с баллами 6, 6, 6, 6, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 ученики с 9, 6, 6, 6, 6 баллами.
Значит,95 баллов - максимальный балл, который мог набрать ученик из школы №1.
в) Используя решение под пунктом а) получим, что $m=19$ – минимальное количество учеников писало тест в школе №2, если их больше 10. Приведем какой-нибудь пример пусть, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 19 учеников по 3 балла, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 один ученик с 9 баллами и 19 ученика с 3 баллами.

Ответ: а) 6; например, пусть первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 ученики с баллами 6, 6,6, 6, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 ученики с 9, 6, 6, 6, 6 баллами.
б) 95, например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 4 ученика по 6 баллов, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 один ученик с 9 баллами и 4 ученика с 6 баллами;
в) 19; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 19 учеников по 3 балла, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 один ученик с 9 баллами и 19 ученика с 3 баллами.

№1.4.(а) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый ученик набрал натуральное количество баллов, среднее арифметическое баллов учеников школы № 1 является натуральным числом, среднее арифметическое учеников школы № 2 равно 14. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест пересчитали в обеих школах и получилось, что в обеих школах он понизился на 2,5 %.
а) Какое количество учеников могло учиться в школе № 2?
б) Какой максимальный балл мог набрать школьник из школы № 2?
в) Какое наибольшее число учеников могло писать тест в школе № 1?
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018(Ейск)

Решение:
Пусть n – количество учащихся школы № 1, m – количество учащихся школы № 2, писавших первоначально тест; x – первоначальный средний балл по тесту в школе №1; z- балл по тесту ученика, перешедшего из школы №1 в школу №2, где n, m, x, z – натуральные числа, где $n \geq 2, m \geq 2$.
а) Краткое условие и решение задачи можно записать в виде таблицы.

	Для первоначальных условий, то есть до перехода учащегося.			Условия, после перехода учащегося.		
№ школы	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе	Количество учащихся	Средний балл по школе	Сумма баллов по школе
№1	n	x	xn	$n-1$	$0{,}975x$	$0{,}975x(n-1)$
№2	m	14	$14m$	$m+1$	$13{,}65$	$13{,}65(m+1)$

Сравнивая, сумму баллов, набранных учениками школ №1 и №2 первоначально и после перехода ученика из школы №1 в школу №2, получим систему уравнений.
$\begin{cases} z = xn - 0{,}975(n-1), \\ z = 13{,}65(m+1) - 14m; \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0{,}025xn + 0{,}975x, \\ z = 13{,}65 - 0{,}35m; \end{cases}$ $\begin{cases} 1000z = x(25n + 975), \\ 100z = 1365 - 35m; \end{cases}$
$\begin{cases} 40z = x(n+39), \\ 20z = 273 - 7m; \end{cases}$ Решая второе уравнение системы в натуральных числах получим, что $m=19$, $z=7$. Тогда первое уравнение имеет вид $280=x(n+39)$, решая его в натуральных числах, при заданных условиях, получим $n=241$, $x=1$ или $n=101$, $x=2$ или $n=31$, $x=4$ или $n=17$, $x=5$.
Приведем какой-нибудь пример, для $n=241$, $x=1$, привести пример, удовлетворяющим условиям задачи невозможно, а для $n=101$, $x=2$ или $n=31$, $x=4$ или $n=17$, $x=5$ возможно, например для $n=31$, $x=4$, пусть первоначально в школе №1 были ученики с баллами 7, 1, и 29 учеников с 4 баллами, а в школе № 2 19 учеников с 14 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученик с 1 баллом и 29 учеников с 4 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 19 учеников с 14 баллами.
Значит, 19 учеников могло писать тест, в школе №2.
б) В школе №2 писало тест 19 учеников, средний балл по школе равен 14, значит сумма баллов, набранная учениками школы №2 равна 266. Если 18 учеников школы №2 набрали наименьшее количество баллов – по 1 баллу, тогда последний 19-й ученик набрал максимальное количество баллов - 248, так как 266-18=248.
Приведем какой-нибудь пример, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 7, 1, и 29 учеников с 4 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученик с 1 баллом и 29 учеников с 4 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами.
Значит, максимальный балл, который мог набрать ученик из школы №2 равен 248.
в) Используя решение под пунктом а) для $n=241$, $x=1$, привести пример, удовлетворяющим условиям задачи невозможно, так как сумма баллов набранная 241 учениками школы №1 равна 241, при этом ученик, который перейдет в школу №2 имеет 7 баллов, а на остальные 240 учеников придется 234 балла, значит как минимум 6 учеников набрали по 0 баллов, что невозможно, так как каждый ученик набрал натуральное количество баллов. Для $n=101$, $x=2$ возможно привести пример, пусть первоначально в школе №1 был ученик с баллами 7, 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами и 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами.
Значит наибольшее число учеников, которое могло писать тест в школе №1 равно 101.
Ответ: а) 19; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 7, 1, и 29 учеников с 4 баллами, а в школе № 2 19 учеников с 14 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученик с 1 баллом и 29 учеников с 4 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 19 учеников с 14 баллами;
б) 248, например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 7, 1, и 29 учеников с 4 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученик с 1 баллом и 29 учеников с 4 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами;

в) 101; например, первоначально в школе №1 был ученик с баллами 7, 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами и 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами;

№1.4.(б) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый ученик набрал натуральное количество баллов, среднее арифметическое баллов учеников школы № 1 является натуральным числом, среднее арифметическое учеников школы № 2 равно 14. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест пересчитали в обеих школах и получилось, что в обеих школах он понизился на 2,5 %.

а) Какое количество учеников могло написать тест, в школе № 2?

б) Какой максимальный балл мог набрать школьник из школы № 2, если каждый ее ученик набрал баллов больше, чем перешедший ученик?

в) Какое наибольшее число учеников могло писать тест, в школе № 1?

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№1.4.(в) В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере два учащихся. Каждый ученик набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причем в школе №2 средний балл равнялся 42. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест пересчитали в обеих школах и получилось, что в обеих школах он понизился на 10 %.

а) Сколько учащихся могло написать тест в школе №2 изначально?

б) Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в нее учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2?

в) Какое наибольшее количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.(Краснодар)

№ 2.1.(а) На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?

в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S-B$

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018. Вариант 401.

Решение:

Пусть $a_1 < a_2 < \cdots < a_{11}$, где $a_1, a_2, \dots, a_{11}$- натуральные числа. Из условия задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6} = 5, \\ \frac{a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}}{6} = 15; \end{cases} \begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 30, \\ a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11} = 90. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части этих уравнений получим уравнение $(a_1+a_2+\cdots+a_{11})+a_6 = 120.$

а) Предположим, что $a_1 = 3$, тогда $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33 > 30$, то есть получили противоречие с условием задачи. Значит, наименьшее из этих 11 различных натуральных чисел не может равняться 3.

б) Предположим, что $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{11}}{11} = 9$, тогда $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 99$ и учитывая, что $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}) + a_6 = 120$, получим, что $a_6 = 21$. Это невозможно, так как $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} = 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 = 141 > 90$. Получили противоречие с условием. Значит наше предположение неверно. Поэтому среднее арифметическое всех одиннадцати чисел не может равняться 9.

в) Пусть $B = a_6, S = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{11}}{11}$, тогда $a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 11S$, из условия, что $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{11}) + a_6 = 120$, получим $11S + B = 120, S = \frac{120-B}{11}$. Значит $S - B = \frac{120-B}{11} - B = \frac{120-12B}{11}$.

Наибольшее значения выражения *S-B* будет при наименьшем значении *B*. Найдем наименьшее значение *B* и оно равно 8, например 2, 3, 4, 6, 7, <u>8</u>, 9, 10, 11, 24, 28. При этих значениях выполняется условие задачи. Покажем, что наименьшее значение *B*, не может быть меньше 8. Предположим, что *B*=7, тогда, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27 < 30$, то есть самая наибольшая сумма первых шести наименьших натуральных чисел меньше 30.

Значит наибольшее значение выражения $S - B = \frac{120-B}{11} - B = \frac{120-12B}{11} = \frac{120-12\cdot8}{11} = \frac{120-96}{11} = \frac{24}{11}$.

Ответ: а) нет, б) нет, в) $\frac{24}{11}$*, например2, 3, 4, 6, 7, <u>8</u>, 9,10, 11,24,28.*

№2.1.(б) На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 7, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 5?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Пусть *B* — шестое по величине число, а *S* — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018. Вариант 402.

№2.1.(в) На доске написано 10 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших равно 13.

а) Может ли наименьшее из этих десяти чисел равняться 4?

б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться 10,2?

в) Найти наибольшее значение среднего арифметического.

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№2.1.(г)

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 6, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 4?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Пусть *B* — шестое по величине число, а *S* — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№2.1.(д)

На доске написано 12 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое шести наибольших равно 16.

а) Может ли наибольшее из этих двенадцати чисел равняться 18?

б) Может ли среднее арифметическое всех двенадцати чисел равняться 11?

в) Найти наименьшее значение среднего арифметического всех двенадцати чисел.

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№2.1.(е)

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14.

а) Может ли наибольшее из этих одиннадцати чисел равняться 16?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Найти наименьшее значение среднего арифметического всех одиннадцати чисел.

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

№3.1.(а) а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n, для которых $m \leq n$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{14}$.

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018.

Решение:

а) Выразим число $\frac{33}{100}$ через сумму дробей, у которых знаменатели являются делителями числа 100 и получим такой пример $\frac{33}{100} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100}$.

б) Выразим число $\frac{15}{91}$ через сумму дробей, у которых знаменатели являются делителями числа 91 или кратными числа 91 и получим такой пример $\frac{15}{91} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182} + \frac{1}{273} + \frac{1}{546}$.

в) По условию $m \leq n$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{14}$.

Тогда $14n + 14m = mn$, $14m = mn - 14n$, $14m = n(m-14)$, $n = \frac{14m}{m-14}$.

Решая это уравнение в натуральных числах, методом перебора получим решение уравнения m=15, n=210 или m=16, n=112 или m=18, n=63 или m=21, n=42 или m=28, n=28.

Ответ: а) Да, например $\frac{33}{100} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100}$;*б) Да, например* $\frac{15}{91} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182} + \frac{1}{273} + \frac{1}{546}$; *в) 15 и 210, 16 и 112, 18 и 63, 21 и42, 28 и 28.*

ЕГЭ-2018. Основная волна. Резерв. 25.06.2018.

№ 4.1.(а) За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?
в) За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 — при получении двух звёзд и 2000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна. Резерв. 25.06.2018. Вариант 501.

Решение:

Пусть x- количество уровней игры, при котором заряд уменьшается на 3 пункта, а Витя получает 3 звезды.
Пусть y- количество уровней игры, при котором заряд уменьшается на 6 пунктов, а Витя получает 2 звезды.
Пусть z- количество уровней игры, при котором заряд уменьшается на 9 пунктов, а Витя получает 1 звезду. Получим, что x, y, z – натуральные числа.
а) Получим уравнение $3x+6y+9z=32$. Так как левая часть делится н 3. А правая часть не делится на 3, то решений уравнения при данных условиях нет. Значит, не мог заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта.
б) Из условия получим систему уравнений $\begin{cases}3x+6y+9z=33\\3x+2y+z=17\end{cases}$. Решая систему уравнений получим три решения: $x=5, y=0, z=2$ *или* $x=4, y=2, z=1$ *или* $x=3, y=4, z=0$. Но для всех трех случаев $x+y+z=7$. Следовательно, 7 уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд.
В) Используя решение пункта б) получим.
Для первого решения $x=5, y=0, z=2, S=5*9000+2*2000=49000$ *очков.*
Для второго решения $x=4, y=2, z=1, S=4*9000+2*5000+1*2000=47000$ *очков.*
Для первого решения $x=3, y=4, z=0, S=3*9000+4*5000=47000$ *очков.*
Значит, 49000- наибольшее количество очков, которое мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?
Ответ: а) нет; б) 7; в) 49 000.

№ 4.1.(б) За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 9 пунктов при получении трёх звёзд, на 12 пунктов при получении двух звёзд и на 15 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.
а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 50 пунктов?
б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звёзд?
в) За пройденный уровень начисляется 7000 очков при получении трёх звёзд, 6000 — при получении двух звёзд и 3000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 75 пунктов и суммарно было получено 11 звёзд?
Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна. Резерв. 25.06.2018. Вариант 502.

№ 5.1.(а) а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72; в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Решение:

Так как $72 = 2^3 \cdot 3^2$, то число делится на 72, если оно делится на 2, 4, 8, 9. Число делится на 2, если последняя цифра 0, 2, 4, 6 или 8. Число делится на 4, если число, состоящее из двух последних цифр делится на 4. Число делится на 8, если число, состоящее из трех последних цифр делится на 8. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

а) Значит, вычеркиваем цифру 9, чтобы число делилось на 2, 78 не делится на 4, значит вычеркиваем цифру 7, тогда число 68 делится на 4, число 568 делится на 8. Значит, осталось число 1234568, сумма цифр этого числа равна 29, поэтому вычеркнув цифру 2, получим число 134568, которое делится на 2, 4, 8 и 9, значит делится на 72. Следовательно, можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72, например , вычеркиваем цифры 9, 7, 2 и получим число 134568, которое делится на 72.

б) Чтобы число 846927531 делилось на 72, надо чтобы оно делилось на 2, 4, 8 и 9. Для того, чтобы это число делилось на 2, надо зачеркнуть цифры 1, 3, 5, 7 и получили число 84692, которое делится на 2 и на 4, но не делится на 8 и не делится на 9. Сумма цифр числа 84692 равна 29, поэтому надо вычеркнуть цифру 2, тогда сумма цифр нового числа равна 27 делится на 9, но число 8469 не делится на 2. Вычеркнув цифру 9, получим число 846, сумма цифр 18, которого делится на 9, но это число не делится на 4. Сумму цифр равную 9 или равную 0 нельзя получить из числа 8469.

в) Из числа 124875963 будем вычеркивать цифры.

Если вычеркнем 7 цифр, то получится двузначное число, двузначное число, которое делится на 72, равно 72, но такое число не может получиться при вычеркивании 7 цифр.

Если вычеркнем 6 цифр, то получится трехзначное число, трехзначные числа, которые делятся на 72, равны 144, 216, 288, 360, 432, 504, 576, 648, 720, 792, 864, 936, но такие числа не могут получиться при вычеркивании 6 цифр.

Если вычеркнем 5 цифр, то получится четырехзначное число. Аналогично решая методом перебора получим число 1296, которое делится на 72 и которое получается при вычеркивании цифр 4, 8, 7, 5,3.

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна. Резерв. 25.06.2018. Вариант 992.

ЕГЭ-2018. Досрочная волна 31.03.2018.

№6.1.(а) На доске написано n чисел a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Каждое из них не меньше 50 и не больше 150. Каждое из этих чисел уменьшают на r_i%. При этом либо $r_i = 2\%$, либо число a_i уменьшается на 2, то есть становится равным $a_i - 2$. (Какие-то числа уменьшились на число 2, а какие-то — на 2 процента).

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ быть равным 5?

б) Могло ли так получиться, что среднее арифметическое чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ больше 2, при этом сумма чисел $a_1, a_2 \ldots a_n$ уменьшилась более чем на $2n$?

в) Пусть всего чисел 30, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Решение:

а) По условию $50 \le a_i \le 150$, $r_i = 2\%$ или при уменьшении a_i на 2 получится $r_i = \frac{2}{a_i} \cdot 100\% = \frac{200}{a_i}\%$. Тогда $\frac{1}{150} \le \frac{1}{a_i} \le \frac{1}{50}$, $\frac{200}{150} \le \frac{200}{a_i} \le \frac{200}{50}$, значит $\frac{4}{3} \le r_i \le 4$. Получим $\frac{4}{3} \le \frac{r_1+\dots+r_n}{n} \le 4$.

Значит среднее арифметическое чисел $r_1, \dots, r_n$ не может быть равным 5.

б) Так как $\frac{r_1+\dots+r_n}{n} > 2$, то хотя бы один $a_i > 50$. Пусть $a_1 = 50$ и его уменьшили на 2, то есть на 4%, а число $a_2 = 150$ уменьшили на 2%, то есть на $\frac{150}{100} \cdot 2 = 3$. Значит $r_1 = 4, r_2 = 2, \frac{r_1+r_2}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 > 2$ и $a_1 + a_2$ уменьшилась на 2+3=5>2n=4.

Значит, может получиться, что среднее арифметическое чисел r_1, r_2, …, r_n больше 2, при этом сумма чисел a_1, a_2 … a_n уменьшилась более чем на $2n$.

в) Пусть k чисел $a_1, \dots, a_k$ уменьшили на 2, тогда $\frac{4}{3} \le \frac{r_1+\dots+r_k}{k} \le 4, \frac{4}{3}k \le r_1 + \dots + r_k \le 4k$, 30 - k чисел $a_{k+1}, \dots, a_{30}$ уменьшили на 2% и тогда $\frac{r_{k+1}+\dots+r_{30}}{30-k} = 2, r_{k+1} + \dots + r_{30} = 2(30-k)$. Следовательно, $\frac{4}{3}k + 2(30-k) \le r_1 + \dots + r_{30} \le 4k + 2(30-k), 60 - \frac{2}{3}k \le r_1 + \dots + r_{30} \le 60 + 2k$. Среднее арифметическое $2 - \frac{2}{90}k \le \frac{r_1+\dots+r_{30}}{30} \le \frac{60+2k}{30}$ будет наибольшим при наибольшем значении k. По условию сумма 30 чисел после выполнения описанной операции уменьшилась на 40, то есть S=40. Значит сумма всех 30 чисел S уменьшилась от *2k+1(30 - k)=30 + k* до *2k+3(30 - k)=90 - k*. То есть $30 + k \le S \le 90 - k$, по условию S=40, получим $30 + k \le 40, k \le 10$. Значит наибольшее *k=10*. Значит наибольшее значение $\frac{r_1+\dots+r_{30}}{30} = \frac{60+2\cdot 10}{30} = \frac{8}{3}$. Например, пусть все 30 чисел равны 50, 10 таких чисел уменьшили на 2, то есть на 4%, а оставшиеся 20 чисел уменьшили на 2%. Тогда $\frac{r_1+\dots+r_{30}}{30} = \frac{10\cdot 4+20\cdot 2}{30} = \frac{8}{3}$.

Ответ: а) нет; б) да; например, $a_1 = 50$ уменьшили на 2, то есть на 4 % , $a_2 = 150$ уменьшили на 2 % , то есть на 3; в) $\frac{8}{3}$, например $a_1 = a_2 = \dots = a_{30} = 50$, 10 этих чисел уменьшили на 2, то есть на 4 % , а 20 таких чисел уменьшили на 2 %.

Источник: Досрочный ЕГЭ по математике (Центр) 31.03.2018.

№ 6.1.(б) На доске написаны числа $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых не меньше 50, но не больше 150. Каждое из чисел a_i уменьшили на r_i %. При этом для каждого i $(1 \le i \le n)$ либо r_i равно 4, либо число a_i уменьшили на 4.

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, \dots, r_n$ быть равным 10?

б) Может ли оказаться, что среднее арифметическое $r_1, \dots, r_n$ чисел больше 4, а сумма чисел $a_1, \dots, a_n$ уменьшилась более чем $4n$?

в) Пусть на доске написано 20 чисел, сумма которых уменьшалась на 50. Найти наибольшее значение среднего арифметического $r_1, \dots, r_{20}$.

Источник: Досрочный ЕГЭ по математике (Центр) 31.03.2018.

№ 6.1.(в) На доске написаны числа $a_1, \dots, a_n$, каждое из которых не меньше 50, но не больше 150. Каждое из чисел a_i уменьшили на r_i %. При этом для каждого i $(1 \le i \le n)$ либо r_i равно 2, либо число a_i уменьшили на 2.

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1, \dots, r_n$ быть равным 5?

б) Может ли оказаться, что среднее арифметическое $r_1, \dots, r_n$ чисел больше 2, а сумма

чисел $a_1,\dots,a_n$ уменьшилась более чем $2n$?
в) Пусть на доске написано 30 чисел, сумма которых уменьшалась на 40. Найти наименьшее значение среднего арифметического $r_1,\dots,r_{30}$.
Ответ: а) нет; б) да; например, $a_1 = 50$ *уменьшили на 2, то есть на 4 % ,* $a_2 = 150$ *уменьшили на 2 % , то есть на 3; в)* $\frac{16}{9}$*, например* $a_1 = a_2 = \cdots = a_{10} = 150$*, 10 этих чисел уменьшили на 2, то есть на* $\frac{4}{3}$ *% , а* $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{30} = 50$*, и 20 таких чисел уменьшили на 2 %, то есть на 1.*
Источник: Досрочный ЕГЭ по математике 31.03.2018.

№ 7.1.(а) В живом уголке четыре ученика кормят кроликов. Каждый кормит нескольких (хотя бы одного) кроликов, но не всех. Первый ученик дает порцию по 100 г, второй – по 200 г, третий – по 300 г, а четвертый – по 400 г.
а) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили одинаковое количество корма?
б) Может ли оказаться, что кроликов было 15 и все они получили различное количество корма?
в) Какое наибольшее количество кроликов могло быть в живом уголке, если каждый ученик насыпал корм ровно четырем кроликам и все кролики получили разное количество корма?
Источник: Досрочный ЕГЭ по математике 31.03.2018.

Решение:
а) Да, например 1-й и 4-й ученики кормят 7 кроликов, 2-й и 3-й ученики кормят 8 кроликов.
б) Нет, так как максимальное количество корма, которое может получить один кролик, равно 100+ 200+ 300+ 400=1000. Значит, количество корма для одного кролика может принимать 11 значений: от 0 до 1000, через 100г. Так как кроликов 15, значения для каких-то кроликов совпадут.
в) Всего ученики насыпали 4(100+200+300+400)=4000г корма. Если бы реализовывались все различные 11 значений от 0 до 1000, потребовалось бы 0+100+200+…+1000=5500г корма, то есть на 1500г больше, чем было насыпано. Значит, из 11 вариантов должны отсутствовать, как минимум, два и кроликов не более 9. Например, отсутствуют варианты: 1000 и 500, или 900 и 600, или 800 и 700.
Ответ: а) да; б) нет; в) 9.

№ 7.1.(б) В живом уголке пять учеников кормят кроликов. Каждый ученик мог покормить любое количество кроликов, но каждому давали одинаковую порцию. Порции разных мальчиков могли отличаться. Некоторые кролики могли остаться без еды.
а) Всего 10 кроликов и каждый в итоге съел одинаковое количества корма. Возможно ли это?
б) Всего 25 кроликов и все кролики съели различное количество корма. Возможно ли это, если каждый ученик покормит по 7 кроликов.
в) Каждый ученик покормил по 7 кроликов. Найти наибольшее количество кроликов, если каждый кролик съел разное количество корма.
Источник: Досрочный ЕГЭ по математике 31.03.2018.

ЕГЭ-2018. Досрочная волна, резерв. 11.04.2018.

№ 8.1.(а) а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} - \sqrt{\boldsymbol{2}}\right| \le \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{100}}$?

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\boldsymbol{\frac{m^2}{n^2}-2}\right| \le \boldsymbol{\frac{1}{10000}}$?
в) Найти все возможные значения натурального числа n при каждом из которых значение выражения $\left|\boldsymbol{\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}}\right|$ будет наименьшим.
Источник: досрочный ЕГЭ-2018, резерв, от 11.04.2018, вариант.

Решение:

а) $\sqrt{2}=1{,}414\ldots;\ 1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Тогда $-\frac{1}{100}<\frac{m}{n}-\sqrt{2}<\frac{1}{100}, \sqrt{2}-\frac{1}{100}<\frac{m}{n}<\sqrt{2}+\frac{1}{100}$. Значит $1{,}4<\frac{m}{n}<1{,}43$. Пусть $\frac{m}{n}=1{,}42=\frac{142}{100}=\frac{71}{50}$. Значит *m=71, n=50*. Значит существуют такие двузначные натуральные числа, что $\left|\boldsymbol{\frac{m}{n}-\sqrt{2}}\right| \le \boldsymbol{\frac{1}{100}}$**.**

б) Предположим, что $\left|\boldsymbol{\frac{m^2}{n^2}-2}\right| \le \boldsymbol{\frac{1}{10000}}$, тогда $-\frac{1}{100^2}\le\boldsymbol{\frac{m^2}{n^2}}-2\le\frac{1}{100^2}$. Тогда $\boldsymbol{\frac{m^2}{n^2}}-\frac{1}{100^2}\le 2\le\boldsymbol{\frac{m^2}{n^2}}+\frac{1}{100^2}$. Так как $n<100, \frac{1}{n}>\frac{1}{100}, \frac{1}{n^2}>\frac{1}{100^2}$ и $-\frac{1}{n^2}<-\frac{1}{100^2}$. Значит $\frac{m^2-1}{n^2}<2<\frac{m^2+1}{n^2}, m^2-1<2n^2<m^2+1$. Значит $2n^2=m^2$, которое не имеет решения при двузначных натуральных числах.

Следовательно, не существует двузначных натуральных чисел m и n таких, что $\left|\boldsymbol{\frac{m^2}{n^2}-2}\right| \le \boldsymbol{\frac{1}{10000}}$.

в) Выражение $\left|\boldsymbol{\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}}\right|=\left|1+\frac{10}{\mathrm{n}}-\sqrt{2}\right|$ будет наименьшим или при *n=24* или *n=25*, так как $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$, методом подбора. При этом $1+\frac{10}{\mathrm{n}}-\sqrt{2}>0$ при *n=24;* $1+\frac{10}{\mathrm{n}}-\sqrt{2}<0$ при *n=25*.

При *n=24* $\mathrm{A}_{24}=\left|\frac{24+10}{24}-\sqrt{2}\right|=\frac{34}{24}-\sqrt{2}$.

При *n=25* $\mathrm{A}_{25}=\left|\frac{25+10}{25}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-\frac{35}{25}$.

Тогда $\mathrm{A}_{24}-\mathrm{A}_{25}=\frac{34}{24}+\frac{35}{25}-2\sqrt{2}<0$. Значит $\mathrm{A}_{24}<\mathrm{A}_{25}$.

Следовательно, при *n=24*, значение выражения $\left|\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}\right|$ будет наименьшим.

Ответ: а) да, например m=71, n=50 ; б) нет; в) 24.

№ 8.1.(б) а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{3}\right| \le \frac{1}{100}$?

б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left|\frac{m^2}{n^2}-3\right| \le \frac{1}{10000}$?

в) Найти все возможные значения натурального числа n при каждом из которых значение выражения $\left|\frac{n+10}{n}-\sqrt{3}\right|$ будет наименьшим.

Источник: досрочный ЕГЭ-2018, резерв, от 11.04.2018.

Ответы.

№ 1.1.(а) *Ответ: а) нет; б) нет; в) 4; например, первоначально в школе №1 было 68, 102 балла у двух учащихся, а в школе №2 у 79 учащихся было по 4 балла и после перехода учащегося, в школе №1 стало 102 балла у одного ученика, а в школе №2 стало у одного ученика 68 баллов и у 79 учащихся стало по 4 балла.*

№ 1.1.(б) *Ответ: а) нет; б) нет; в) 3; например, первоначально в школе №1 было 18, 22 балла у двух учащихся, а в школе №2 у 49 учащихся было по 3 балла и после перехода учащегося, в школе №1*

стало 22 балла у одного ученика, а в школе №2 стало у одного ученика 18 баллов и у 49 учащихся стало по 3 балла.
№ 1.1.(в) *Ответ: а) нет; б) нет; в) 4; например, первоначально в школе №1 было 68, 102 балла у двух учащихся, а в школе №2 у 79 учащихся было по 4 балла и после перехода учащегося, в школе №1 стало 102 балла у одного ученика, а в школе №2 стало у одного ученика 68 баллов и у 79 учащихся стало по 4 балла.*
№ 1.1.(г) *Ответ: а) нет; б) нет; в) 3; например, первоначально в школе №1 было 18, 22 балла у двух учащихся, а в школе №2 у 49 учащихся было по 3 балла и после перехода учащегося, в школе №1 стало 22 балла у одного ученика, а в школе №2 стало у одного ученика 18 баллов и у 49 учащихся стало по 3 балла.*
№ 1.1.(д) *Ответ: а) нет; б) нет; в) 3; например, первоначально в школе №1 было 6, 74 балла у двух учащихся и у 16 учащихся было по 40 баллов, а в школе №2 у 19 учащихся было по 3 балла и после перехода учащегося, в школе №1 стало 74 балла у одного ученика и 40 баллов у 16 учащихся, а в школе №2 стало у одного ученика 6 баллов и у 19 учащихся стало по 3 балла.*
№ 1.2.(а) *Ответ: а) да; например, первоначально в школе №1 было два ученика с баллами 19 и 1, а после перехода учащегося, в школе №1 остался один ученик с 1 баллом; б) нет;*
в) 5; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 3, 1, 1, 1, 1, 5, а в школе №2 были ученики с баллами 5, 5, 5, а после перехода учащегося, в школе №1 стали ученики с баллами 1, 1, 1, 1, 5, а в школе №2 стали ученики с баллами 3, 5, 5, 5.
№ 1.2.(б) *Ответ: а) да; например, первоначально в школе №1 было два ученика с баллами 3 и 1, а после перехода учащегося, в школе №1 остался один ученик с 1 баллом; б) нет;*
в) 6; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 3, 1 и 24 ученика по 2 балла, а в школе №2 было 24 ученика с 6 баллами, а после перехода учащегося, в школе №1 стал ученик с 1 баллом и 24 ученика с 2 баллами, а в школе №2 стал ученики с 3 баллами и 24 ученика с 6 баллами.
№ 1.2.(в) *Ответ: а) да; например, первоначально в школе №1 было два ученика с баллами 7 и 1, а после перехода учащегося, в школе №1 остался один ученик с 1 баллом; б) нет;*
в) 5; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 4, 1,1 и 23 ученика по 2 балла, а в школе №2 было 4 ученика с 5 баллами, а после перехода учащегося, в школе №1 стали ученики с баллами 1, 1 и 23 ученика с 2 баллами, а в школе №2 стал ученик с 4 баллами и 4 ученика с 5 баллами.
№ 1.2.(г) *Ответ: а) да; например, первоначально в школе №1 было два ученика с баллами 9 и 1, а после перехода учащегося, в школе №1 остался один ученик с 1 баллом; б) нет;*
в) 4; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 3, 1 и 9 учеников по 2 балла, а в школе №2 было 4 ученика с 4 баллами, а после перехода учащегося, в школе №1 стали ученики с баллами 1 и 9 учеников с 2 баллами, а в школе №2 стал ученик с 3 баллами и 4 ученика с 4 баллами.
№ 1.3.(а) *Ответ: а) 6; например, пусть первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 ученики с баллами 6, 6,6, 6, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 ученики с 9, 6, 6, 6, 6 баллами.*
б) 95, например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 4 ученика по 6 баллов, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 один ученик с 9 баллами и 4 ученика с 6 баллами;
в) 19; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 9, 1, 1, 1, 1, 95, а в школе № 2 19 учеников по 3 балла, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученики с 1. 1, 1, 1, 95 баллами, в школе № 2 один ученик с 9 баллами и 19 ученика с 3 баллами;
№ 1.4.(а) *Ответ: а) 19; например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 7, 1, и 29 учеников с 4 баллами, а в школе № 2 19 учеников с 14 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученик с 1 баллом и 29 учеников с 4 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 19 учеников с 14 баллами;*
б) 248, например, первоначально в школе №1 были ученики с баллами 7, 1, и 29 учеников с 4 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученик с 1 баллом и 29 учеников с 4 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами;
в) 101; например, первоначально в школе №1 был ученик с баллами 7, 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами, и после

перехода учащегося, в школе №1 остались 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами и 18 учеников с 1 баллом и один ученик с 248 баллами;
№ 1.4.(б) *Ответ: а) 19; например, первоначально в школе №1 был ученик с 7 баллами, 5 учеников с 1 баллом, 95 учеников с 2 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 8 баллами и один ученик с 122 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 18 учеников с 8 баллами и один ученик с 122 баллами;*
б) 19; например, первоначально в школе №1 был ученик с 7 баллами, 5 учеников с 1 баллом, 95 учеников с 2 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 8 баллами и один ученик с 122 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами, 18 учеников с 8 баллами и один ученик с 122 баллами;
в) 101; например, первоначально в школе №1 был ученик с баллами 7, 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, а в школе № 2 18 учеников с 8 баллами и один ученик с 122 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались 5 учеников с 1 баллом и 95 учеников с 2 баллами, в школе № 2 один ученик с 7 баллами и 18 учеников с 8 баллами и один ученик с 122 баллами;
№1.4(в) *Ответ :а) 4; например, первоначально в школе №1 были ученики с 21, 9, 15, 15 и 15 баллами, а в школе №2 4 ученика с 42 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались 4 ученика с баллами 9, 15, 15 и 15 баллами, а в школе №2 один ученик с 21 баллом и 4 ученика с 42 баллами; б)102; например, первоначально в школе №1 были ученики с 21, 9, 15, 15 и 15 баллами, а в школе №2 ученики с 22, 22, 22 и 102 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались 4 ученика с баллами 9, 15, 15 и 15 баллами, а в школе №2 ученики с 21, 22, 22, 22 и 102 баллами ; в) 96; например, первоначально в школе №1 были ученики с 21, 77 баллами и 94 ученика с 1 баллом, а в школе №2 было 4 ученика с 42 баллами, и после перехода учащегося, в школе №1 остались ученик с 77 баллами и 94 ученика с 1 баллом, а в школе №2 стали 4 ученика с 42 баллами и ученик с 21 баллом.*
№ 2.1.(а) *Ответ: а) нет, б) нет, в)* $\frac{24}{11}$, *например2, 3, 4, 6, 7, <u>8</u>, 9,10, 11,24,28.*
№ 2.1.(б) *Ответ: а) нет, б) нет, в)* $\frac{18}{11}$, *например 4,5, 6, 8, 9, <u>10</u>, 11, 12, 13, 24, 26.*
№ 2.1.(в) *Ответ: а) нет; б) нет; в) 9,7; например 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 22.*
№2.1.(г) *Ответ: а) нет; б) нет; в)* $\frac{24}{11}$.
№2.1.(д) *Ответ: а) нет; б) нет; в)* $\frac{47}{4}$.
№2.1.(е) *Ответ: а) нет; б) нет; в)* $\frac{123}{11}$.
№3.1.(а) *Ответ: а) Да, например* $\frac{33}{100}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{50}+\frac{1}{100}$; *б) Да, например* $\frac{15}{91}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}+\frac{1}{182}+\frac{1}{273}+\frac{1}{546}$; *в) 15 и 210, 16 и 112, 18 и 63, 21 и42, 28 и 28.*
№4.1.(а) *Ответ: а) нет; б) 7; в) 49 000.*
№4.1.(б) *Ответ: а) 6; б) 89; в) 19.*
№5.1.(а) *Ответ: а) да; б) нет; в) 5.*
№6.1.(а) *Ответ: а) нет; б) да; например,* $a_1=50$ *уменьшили на 2, то есть на 4 % ,* $a_2=150$ *уменьшили на 2 % , то есть на 3; в)* $\frac{8}{3}$ *; например* $a_1=a_2=\dots=a_{30}=50$, *10 этих чисел уменьшили на 2, то есть на 4 % , а 20 таких чисел уменьшили на 2 %.*
№6.1.(б) *Ответ: а) нет; б) да; например,* $a_1=50$ *уменьшили на 4, то есть на 8 % ,* $a_2=150$ *уменьшили на 4 % , то есть на 3; в) 5; например* $a_1=a_2=\dots=a_{20}=50$, *5 этих чисел уменьшили на 4, то есть на 8 % , а 15 таких чисел уменьшили на 4 %.*
№6.1.(в) *Ответ: а) нет; б) да; например,* $a_1=50$ *уменьшили на 2, то есть на 4 % ,* $a_2=150$ *уменьшили на 2 % , то есть на 3; в)* $\frac{16}{9}$, *например* $a_1=a_2=\dots=a_{10}=150$, *10 этих чисел уменьшили на 2, то есть на* $\frac{4}{3}$ *% , а* $a_{11}=a_{12}=\dots=a_{30}=50$, *и 20 таких чисел уменьшили на 2 %, то есть на 1.*
№7.1.(а) *Ответ: а) да; б) нет; в) 9.*
№8.1.(а) *Ответ: а) да, например m=71, n=50 ; б) нет; в) 24*
№8.1.(б) *Ответ: а) да, например m=87, n=50 ; б) нет; в) 14.*