Алгебра логики.

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные древнегреческими мыслителями. Основы формальной логики заложил Аристотель, который впервые отделил логические формы мышления (речи) от его содержания.

Логика – это наука о формах и способах мышления.

Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира. Логика позволяет строить формальные модели окружающего мира, отвлекаясь от содержательной стороны.

Мышление всегда осуществляется в каких-то формах. Основными формами мышления являются:

1) *Понятие*

Понятие — это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

2) *Высказывание*

Высказывание — это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о реальных предметах, их свойствах и отношениях между ними. Высказывание может быть либо истинно, либо ложно (5 + 3 = 8 – истинное высказывание; Лондон является столицей Франции – ложное высказывание).

Высказывание не может быть выражено повелительным, восклицательным, или вопросительным предложением, т. к. оценка их истинности или ложности невозможна.

3) *Умозаключение*

Умозаключение — это форма мышления с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (вывод).

Алгебра логики – математический аппарат, с помощью которого записывают, вычисляют, упрощают и преобразовывают логические высказывания.

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Употребляемые в обычной речи слова «не», «и», «или», «если …, то», «тогда и только тогда» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются *логическими связками*.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются *составными*. Высказывания, не являющиеся составными, называют *элементарными*.

В алгебре высказываний высказывания обозначаются именами логических переменных которые могут принимать лишь два значения «истина» (1) и «ложь» (0).

В алгебре высказываний над высказываниями можно производить определенные логические операции, в результате которых получаются новые, составные высказывания.

Для образования новых высказываний наиболее часто используются базовые логические операции, выражаемые с помощью логических связок «и», «или», «не».

Основные логические операции.

Логическое умножение (конъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «и называется операцией **логического умножения** или **конъюнкцией**.

Составное высказывание, образованное в результате операции логического умножения (конъюнкции), истинно тогда и только тогда, когда истинны входящие в него простые высказывания.

Операцию логического умножения (конъюнкцию) принято обозначать либо значками «&», «$\wedge$» либо знаком умножения «*». Образуем составное высказывание F, которое получится в результате конъюнкции двух простых высказываний:

F=A&B

С точки зрения алгебры высказываний мы записали формулу функции логического умножения, аргументами которой являются логические переменные A и B, которые могут принимать значения «истина» (1) и «ложь» (0).

Сама функция логического умножения F также может принимать лишь два значения «истина» (1) и «ложь» (0). Значение логической функции можно определить с помощью таблицы истинности данной функции, которая показывает, какие значения принимает логическая функция при всех возможных наборах ее аргументов.

A	B	$A\& B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Логическое сложение (дизъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний с помощью союза «или» называется операцией **логического сложения** или **дизъюнкцией**.

Составное высказывание, образованное в результате логического сложения (дизъюнкции), истинно тогда, когда истинно хотя бы одно из входящих в него простых высказываний.

Операцию логического сложения (дизъюнкцию) принято обозначать либо значком «$\vee$» либо знаком сложения «+». Образуем составное высказывание F, которое получится в результате дизъюнкции двух простых высказываний:

F=A$\vee$B

С точки зрения алгебры высказываний мы записали формулу функции логического сложения, аргументами которой являются логические переменные A и B. Значение логической функции можно определить с помощью таблицы истинности данной функции, которая показывает какие значения принимает логическая функция при всех возможных наборах ее аргументов.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Логическое отрицание (инверсия)

Присоединение частицы «не» к высказыванию называется операцией **логического отрицания** или **инверсией**.

Логическое отрицание (инверсия) делает истинное высказывание ложным и, наоборот, ложное — истинным.

Операцию логического отрицания (инверсию) над логическим высказыванием А принято обозначать $\overline{A}$. Образуем высказывание F, являющееся логическим отрицанием А.

F= $\overline{A}$

Истинность такого высказывания задается таблицей истинности функции логического отрицания.

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Логическое следование (импликация)

Объединение двух высказываний с помощью логической связки «если…, то…», называется операцией **логического следования** или **импликацией**.
Составное высказывание, образованное в результате логического следования (импликаци) истинно во всех случаях, кроме как из истины следует ложь. То есть данная логическая операция связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (А), а второе (В) является следствием.
«А → В» истинно, если из А может следовать В.

Обозначение: F = A → B.

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Логическое равенство (эквиваленция)

Объединение двух высказываний с помощью логической связки «тогда и только тогда, когда», называется операцией **логического равенства** или **эквивалентностью**.

Составное высказывание, образованное в результате логического равенства (эквивалентности) является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность.
«A ↔ B» истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.
Обозначение: F = A ↔ B.

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Порядок следования логических операций

отрицание (¬), конъюнкция (∧), дизъюнкция (∨), импликация (→), эквиваленция (↔)

Построение таблиц истинности составных высказываний

Алгоритм построения:

1. Определить количество строк:

количество строк = 2^n + строка для заголовка,
n - количество простых высказываний.

2. Определить количество столбцов:

количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;

- определить количество переменных (простых выражений);
- определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Пример: Составить таблицу истинности логического выражения:
D = ¬ A & (B ∨ C).
<u>Решение:</u> Ù

1. Определить количество строк:

на входе три простых высказывания: A, B, C поэтому n=3 и количество строк = 2^3 +1 = 9.

2. Определить количество столбцов:

- простые выражения (переменные): A, B, C;
- промежуточные результаты (логические операции):

¬ A - инверсия (обозначим через E);
B ∨ C - операция дизъюнкции (обозначим через F);
а также искомое окончательное значение арифметического выражения:
D = ¬ A & (B ∨ C). т.е. D = E & F - это операция конъюнкции.

3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций.

A	B	C	E	F	E & F
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Построение логической функции по ее таблице истинности:
Попробуем решить обратную задачу. Пусть дана таблица истинности для некоторой логической функции Z(X,Y):

X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Составить логическую функцию для заданной таблицы истинности.
Правила построения логической функции по ее таблице истинности:

1. Выделить в таблице истинности те строки, в которых значение функции равно 1.
2. Выписать искомую формулу в виде дизъюнкции нескольких логических элементов. Число этих элементов равно числу выделенных строк.
3. Каждый логический элемент в этой дизъюнкции записать в виде конъюнкции аргументов функции.
4. Если значение какого-либо аргумента функции в соответствующей строке таблице равно 0, то этот аргумент взять с отрицанием.

<u>Решение.</u>

1. В первой и третьей строках таблицы истинности значение функции равно 1.
2. Так как строки две, получаем дизъюнкцию двух элементов: ( ) V ( ).
3. Каждый логический элемент в этой дизъюнкции запишем в виде конъюнкции аргументов функции X и Y: (X & Y) V (X & Y).
4. Берем аргумент с отрицанием если его значение в соответствующей строке таблицы равно 0 и получаем искомую функцию: Z (X, Y) =(¬ X & ¬Y) V (X & ¬Y).