Тема: **Кодирование чисел. Системы счисления.**

**Нужно знать**:

* принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления
* чтобы перевести число, скажем, 12345N, из системы счисления с основанием  в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на  в степени, равной ее разряду:

**Перевод в 10-ную систему счисления**

**N0 = 1**

**4 3 2 1 0**  ← разряды

**a b c d e N = a·N4 + b·N3 + c·N2 + d·N1 + e·N0**

**Перевод из десятичной системы счисления в двоичную:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **128** | **64** | **32** | **16** | **8** | **4** | **2** | **1** | **Число 10** |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20110 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 23610 |

* последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием  – это остаток от деления этого числа на 
* две последние цифры – это остаток от деления на , и т.д.
* число 10N записывается как единица и N нулей:
* число 10N-1записывается как *N* девяток:
* число 10N-10M =10M · (10N-M – 1) записывается как *N-M* девяток, за которыми стоят M нулей:
* число 2N в двоичной системе записывается как единица и N нулей:
* число 2N-1в двоичной системе записывается как *N* единиц:
* число 2*N–*2*K* при *K* < *N* в двоичной системе записывается как *N–K* единиц и *K* нулей: 
* поскольку , получаем , откуда следует, что 
* число 3N записывается в троичной системе как единица и N нулей:
* число 3N-1записывается в троичной системе как *N* двоек:
* число 3N – 3M =3M · (3N-M – 1) записывается в троичной системе как *N-M* двоек, за которыми стоят M нулей:
* выводы **для любой системы счисления с основанием a**:
  + число aN в системе счисления с основанием a записывается как единица и N нулей: 
  + число aN-1 в системе счисления с основанием a записывается как N старших цифр этой системы счисления, то есть, цифр (a-1): 
  + число aN – aM = aM · (aN-M – 1) записывается в системе счисления с основанием a как *N-M* старших цифр этой системы счисления, за которыми стоят M нулей:

**Разбор заданий**

1. **Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 8740 – 2900 + 7**

**120**

**Решение:**

1. *Общая идея*: количество значащих нулей равно количеству всех знаков в двоичной записи числа (его длине!) минус количество единиц
2. приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что 7 = 8 – 1 = 23 – 20 :

8740 – 2900 + 7= (23)740 – 2900 + 23 – 20 = 22220 - 2900 + 23 – 20

1. старшая степень двойки – 22220, двоичная запись этого числа представляет собой единицу и 2220 нулей, то есть, состоит из 2221 знака; таким образом, остаётся найти количество единиц
2. вспомним, число 2*N–*2*K* при *K* < *N* записывается как *N–K* единиц и *K* нулей: 
3. для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида 2*N–*2*K*, причём в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию
4. в нашем случае в выражении

22220 - 2900 + 23 – 20

две пары 2*N–*2*K* , а остальные слагаемые дают по одной единице

1. общее число единиц равно (2220 - 900) + (3 – 0) = 1323
2. таким образом, количество значащих нулей равно 2221 – 1323 = 898
3. ответ: 898
4. **Значение арифметического выражения: 920 + 360 – 5 записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?**

**Решение:**

1. Приведём все числа к степеням тройки, учитывая, что 5=9-4=32-(31+30):

920 + 360 – 5= (32)20 + 360 + 32-(31+30) = 340 + 360– (32-(31+30) )

Перепишем выражение, располагая степени тройки в порядке убывания:   
 360 + 340 – 32 + 31 + 30

1. Сначала рассмотрим часть выражения, в которой имеется разность: 340 – 32 :

в её троичной записи 40 – 2=38 «двоек» и 2 «нуля»;

1. Прибавим к полученному значению сумму: 31 + 30 = 113. В троичной записи результата два крайних справа нуля заменяются на «единицы». Общее количество «двоек» не изменится: 38.
2. Прибавление значения 360 не изменит количества «двоек» в троичном числе: слева от имеющихся цифр появятся 60 – 40=20 «нулей» и одна «единица» – на 61-й справа позиции.
3. Ответ: 38.
4. **Сколько единиц в двоичной записи числа 42015 + 8405 – 2150 – 122**

**Решение (С.О. Куров, Москва):**

1. приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что 122 = 128 – 4 – 2 = 27 – 22 – 21:

42015 + 8405 – 2150 – 122 = (22)2015 + (23)405 – 2150 – 27 + 22 + 21 =

= 24030 + 21215 – 2150 – 27 + 22 + 21

1. ищем в **разности** крайнюю левую степень двойки и крайнюю правую 21215 – 27, при этом 2150 на время «теряем»
2. определяем количество единиц в разности 21215 – 27, получаем 1215 – 7 = 1208 единиц
3. так как «внутри» этой разности есть еще 2150, то просто вычитаем одну единицу: 1208 – 1 = 1207; итого в разности 21215 – 2150 – 27 ровно 1207 единиц
4. осталось прибавить по одной единицы от чисел 24030, 22, 21
5. Ответ: 1210
6. **Решите уравнение** **.  
   Ответ запишите в шестеричной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.**

**Решение:**

1. удобнее всего перевести все числа в десятичную систему, решить уравнение и результат перевести в шестеричную систему
2. получаем **
3. уравнение приобретает вид **, откуда получаем **
4. переводим 15 в шестеричную систему счисления: **
5. ответ: 23.
6. **Запись числа 6710 в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Укажите основание этой системы счисления N.**

**Решение:**

1. поскольку запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 1, то остаток от деления числа 67 на N равен 1, то есть при некотором целом  имеем



1. следовательно, основание N – это делитель числа 66
2. с другой стороны, запись числа содержит 4 цифры, то есть 
3. выпишем кубы и четвертые степени первых натуральных чисел, которые являются делителями числа 66:



1. видим, что из этого списка только для числа N = 3 выполняется условие 
2. таким образом, верный ответ – 3.
3. можно сделать проверку, переведя число 67 в троичную систему **6710 = 21113**
4. **Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием четыре оканчивается на 11?**

**Общий подход:**

* вспомним алгоритм перевода числа из десятичной системы в систему с основанием  (см. презентацию), из него следует, что младшая цифра результата – это остаток от деления исходного числа на , а две младших цифры – это остаток от деления на  и т.д.
* в данном случае , остаток от деления числа на  должен быть равен 114 = 5
* потому задача сводится к тому, чтобы определить все числа, которые меньше или равны 25 и дают остаток 5 при делении на 16

**Решение:**

1. общий вид чисел, которые дают остаток 5 при делении на 16:



где  – целое неотрицательное число (0, 1, 2, …)

1. среди всех таких чисел нужно выбрать те, что меньше или равны 25 («не превосходят 25»); их всего два: 5 (при ) и 21 (при )
2. таким образом, верный ответ – 5, 21 .

|  |
| --- |
| **Затруднения**:   * + выражение «не превосходящие » означает «меньшие или равные », а не строго меньшие   + остаток, состоящий из нескольких цифр (здесь – 114), нужно не забыть перевести в десятичную систему   + найденные числа нужно записать именно в порядке возрастания, как требуется |

1. **Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 31 оканчивается на 11.**

**Общий подход:**

* неизвестно основание системы счисления, мы обозначим его через 
* пока будем считать, что запись числа 31 в системе с основанием  состоит из трех цифр, причем две младшие (11) нам даны, а одну (обозначим ее через ) нужно найти:

2 1 0 ← разряды

**31 = k 1 1N = k·N2 + N1 + N0 = k·N2 + N + 1**

* можно показать, что при большем количестве разрядов эта формула также верна, то есть, число 31 можно представить как  при некотором целом ; например, для числа с пятью разрядами получаем:

4 3 2 1 0 ← разряды

**31 = k4 k3 k2 1 1N = k4·N4 + k3·N3 + k2·N2 + N1 + N0 = k·N2 + N + 1**

для  (из первых трех слагаемых вынесли общий множитель )

**Решение:**

1. итак, нужно найти все целые числа , такие что

 (\*\*)

где  – целое неотрицательное число (0, 1, 2, …);

1. сложность в том, что и , и  неизвестны, однако здесь нужно «играть» на том, что это *натуральные числа*
2. из формулы (\*\*) получаем , так что задача сводится к тому, чтобы найти все делители  числа 30 и отобрать только те из них, для которых уравнение (\*\*) разрешимо при целом , то есть,  – целое число
3. выпишем все делители числа 30, большие или равные 2: 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
4. из всех этих делителей только для 2, 3, 5 и 30 значение  – целое число (оно равно соответственно 7, 3, 1 и 0)
5. таким образом, верный ответ – 2, 3, 5, 30.
6. **Чему равно наименьшее основание позиционной системы счисления , при котором 225x = 405y? Ответ записать в виде целого числа.**

**Решение:**

1. Поскольку в левой и в правой частях есть цифра 5, оба основания больше 5, то есть перебор имеет смысл начинать с .
2. Очевидно, что , однако это не очень нам поможет.
3. Для каждого «подозреваемого»  вычисляем значение и решаем уравнение , причем нас интересуют только натуральные .
4. Для  и  нужных решений нет, а для  получаем



так что.

1. Верный ответ (минимальное значение ): 8.